УДК 519.615.5

О. В. Белякова

ВАРИАНТ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА С ПОЛУУКРУПНЕНИЕМ

Для решения систем линейных уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей предложен вариант многосеточного метода с полуукрупнением. Представлены результаты численных экспериментов, исследующих эффективность предложенного алгоритма.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. Вып. 10. С. 102 – 109.

For solving systems of linear equations with block tridiagonal matrices there is presenting a variant of multi-grid method with semi-coarse. There are giving the results of numerical experiments, that show high efficiency of presented method.

Ключевые слова: многосеточный метод, сетки с полуукрупнением, системы линейных уравнений, блочно-трехдиагональные матрицы.

Key words: multi-grid method, semi-coarse grids, systems of linear equation, block tridiagonal matrices.

Введение

При численном решении краевых задач для эллиптических уравнений методом сеток или Галёркина решаются системы линейных алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\mathbf{A} = \text{blocktridiag}(\mathbf{L}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{R}_i), \mathbf{L}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{R}_i \subset \Re^{m \times m}, i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Одним из эффективных итерационных методов решения задачи (1—2) является многосеточный метод (MGM, MultiGrid Method). Главное его преимущество — независимая от числа узлов сетки скорость сходимости, что обеспечивает получение решения системы за время, пропорциональное числу неизвестных.

Основная идея MGM состоит в уменьшении низкочастотной части невязки с помощью решения вспомогательных систем, соответствующих грубым сеткам. Для этого вводится последовательность сеток с убывающим количеством узлов, с каждой из которых связана своя система. В большинстве работ [1—4] для построения матриц вспомогательных систем используется метод Галеркина, в двумерном случае при этом число узлов на каждой более крупной сетке уменьшается примерно в четыре раза, а в качестве сглаживающих итераций применяются простые итерации или вариант блочного метода Гаусса — Зейделя с чередованием по строкам (black-red).

В работе [5] для численного решения задачи Дирихле для двумерного уравнения диффузии методом сеток был предложен и исследован вариант MGM с полуукрупнением сетки MGM_{SC} (SC — semi-coarse grids). В нем для решения каждой системы уравнений, соответствующей сетке с параметрами (h_x, h_y), используется система уравнений, соответствующая сетке с параметрами $(2h_x, h_y)$, так что количество неизвестных во вспомогательной системе уменьшается в два раза, $\text{MGM}_{\text{SC}}^{\text{x}}$. Такой способ уменьшения неизвестных позволил эффективно применить в качестве сглаживающих итераций блочный метод Гаусса — Зейделя с шахматным (черно-белым) упорядочением (zebra-line), рассмотреть дополнительные варианты построения вспомогательных матриц, в том числе вариант [6], основанный на исключении отдельных строк системы, подобно исключению в известном методе четно-нечетной редукции [7].

Для численного решения системы (1—2) с симметричной положительно определенной матрицей предлагается вариант многосеточного метода с полуукрупнением $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$, использующий композицию $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ и $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{y}}$, исследуется его эффективность на численных примерах при различных способах построения матриц вспомогательных систем. Предложенный метод достаточно просто реализуется и во многих случаях имеет явное преимущество по сравнению с $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$.

1. Описание варианта многосеточного метода с полуукрупнением прямоугольной сетки

Пусть решается система (1), в которой

$$\mathbf{A} = \mathrm{blocktridiag}(\mathbf{L}_{i-1}, \mathbf{D}_i, \mathbf{L}_i),\ \mathbf{D}_i, \mathbf{L}_i \in \Re^{n_x \times n_x},\ \mathbf{A} \in \Re^{n_x \cdot n_y \times n_x \cdot n_y},\ \mathbf{A} > 0. \qquad (3)$$

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ — блочные вектор-столбцы из пространства $\Re^{n_x \cdot n_y}$:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_{n_x})^T,\ \mathbf{u} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_{n_x})^T,\ \mathbf{F}_i, \mathbf{U}_i \in \Re^{n_y},\ i = 1, \ldots, n_x.$$

Одна итерация предлагаемого варианта многосеточного метода $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ состоит в следующем. Для решения (1 и 3) применим $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$, использующий последовательность систем $\mathbf{A}_{l_x}\mathbf{u}_{l_x} = \mathbf{f}_{l_x}$, $l_x = 1, \ldots, k_x$, в каждой из которых количество блоков $\mathbf{U}_i \in \Re^{n_y}$, $i = 1, \ldots, n_x^{l_x}$ неизвестного вектора $\mathbf{u}_{l_x}$ уменьшается, но размерность каждого $\mathbf{U}_i$ остается неизменной. Затем каждую из этих систем будем решать аналогично, применяя $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{y}}$: $\mathbf{A}_{l_x}^{(l_y)}\mathbf{u}_{l_x}^{(l_y)} = \mathbf{f}_{l_x}^{(l_y)}$, $l_y = 1, \ldots, k_y$. Теперь в каждой системе количество блоков неизвестного вектора остается без изменения, но размерность блоков меняется. В результате получаются $(k_x - 1)\cdot(k_y - 1)$ вспомогательных систем, каждая из которых определяется из предыдущей вычеркиванием нечетных столбцов или нечетных строк.

Матрицы $\mathbf{A}_l$ вспомогательных систем строятся рекуррентно. При $l = 1$ $\mathbf{A}_l$ совпадает с матрицей заданной системы. Матрица $\mathbf{A}_{l+1}$ строится по выбранному правилу, например методом Галёркина: $\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{r}_l^x \mathbf{A}_l \mathbf{p}_l^x$, где $\mathbf{p}_l^x$ — оператор продолжения в пространстве $\Re^{n_x}$, который соответствует шаблону $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_l^x = (\mathbf{p}_l^x)^T$ — оператор сужения. Получается матрица исходной структуры: $\mathbf{A}_{l+1} = \mathrm{blocktridiag}(\mathbf{L}_{i-1}^{(l+1)}, \mathbf{D}_i^{(l+1)}, \mathbf{L}_i^{(l+1)})$.

Такая же структура будет и у $\mathbf{A}_{l+1}$, если она строится следующими методами:

- исключением строк [6]: $\mathbf{A}_{l+1} = \mathrm{reduce}(\mathbf{A}_l)$;
- модифицированным методом Галёркина [5]: $\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{r}_l^x \mathbf{A}_l \mathbf{p}_l^x + \mathbf{Q}_{l+1}$, где $\mathbf{Q}_{l+1}$ — некоторая вспомогательная матрица;
- $\mathbf{A}_{l+1} = \mathrm{reduce}(\mathbf{A}_l) + \mathbf{Q}_{l+1}$.

Опишем одну итерацию $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ и $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ на псевдокоде (табл. 1).

Таблица 1

Псевдокоды многосеточных итераций $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$

$MGM_{SC}^{x}(l_y),\quad l_y = 1$	MGM_{SC}^{xy}

SmoothIter = 1,5; {количество сглаживающих итераций}
for l_x = 1 to k_x – 1 do
begin
BlockGS_x (l_x, l_y, SmoothIter); {сглаживающие итерации Гаусса-Зейделя по строкам}
Restriction_x (l_x + 1, l_y); {сужение на сетку с номером (l_x + 1)}
Coarse_f_x (l_x, l_y); {пересчет столбца свободных членов для следующей вспомогательной системы}
end;
l_x = k_x; { k_x — номер самой грубой сетки}
SolveInLine_x (l_x, l_y); {решение системы с трехдиагональной матрицей}
While l_x > 1 do
begin
Plolongation_x (l_x, l_y); {операция продолжения}
l_x = l_x — 1;
BlockGS_x (l_x, l_y, SmoothIter);
end
	SmoothIter = 1,5;
	l_y = 1;
	for l_x = 1 to k_x – 1 do
	begin
	BlockGS_x (l_x, l_y, SmoothIter);
	Restriction_x (l_x + 1, l_y);
	Coarse_f_x (l_x, l_y);
	end;
	l_x = k_x;
	SolveInLine_x (l_x, l_y);
	While l_x > 1 do
	begin
	Plolongation_x (l_x, l_y);
	l_x = l_x — 1;
	HalfBlockGS_x (l_x, l_y); {половина итерации Гаусса — Зейделя}
	$\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{y}}(l_x)$;
	end

2. Оценка вычислительной сложности алгоритма

Оценим и сравним количество арифметических операций, необходимых для выполнения каждой из итераций $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ и $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$. Поскольку элементы матриц вспомогательных систем вычисляются один раз, то не будем включать эти вычисления в общий объем работы. В многосеточной итерации наиболее емкими по количеству арифметических действий являются сглаживающие итерации BlockGS_x, BlockGS_y. Поэтому для оценки вычислительной сложности алгоритма будем учитывать только сглаживающие итерации.

Обозначим через $C^{GS} \cdot n_x \cdot n_y$ количество арифметических операций на выполнение сглаживающей итерации блочным методом Гаусса — Зейделя для приближенного решения системы размером $n_x \cdot n_y$, где C^{GS} — некоторая положительная константа, не зависящая от n_x, n_y. Подсчитаем число арифметических операций, необходимых для выполнения итерации $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ с 1,5 сглаживающей итерации. При переходе от исходной системы уравнений к системе с наименьшим количеством неизвестных выполняются арифметические действия в количестве:

- $1{,}5C^{GS} \cdot n_x \cdot n_y$ — для исходной системы (l_x = 1 в таблице 1);

- $1{,}5C^{GS}\cdot\frac{n_x}{2}\cdot n_y$ — для следующей вспомогательной системы ($l_x = 2$);
- …;
- $1{,}5C^{GS}\cdot\frac{n_x}{2^{k_x-1}}\cdot n_y$ — для предпоследней вспомогательной системы

($l_x = k_x - 1$) (последняя вспомогательная система — трехдиагональная порядка n_y, которая решается точно методом прогонки).

Всего операций

$$\frac{3}{2}C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k_x-1}})=\frac{2\cdot 2^{k_x-1}-1}{2^{k_x-1}}\cdot\frac{3}{2}C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y\approx 3\cdot C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y .$$

Из таблицы 1 видно, что итерация $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ реализована по схеме симметричного V-цикла. Поэтому такое же количество сглаживающих итераций затрачивается при обратном переходе: от системы с номером (k_x – 1) к исходной системе с номером 1. Следовательно, общее количество арифметических операций будет примерно $6\cdot C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y$.

Проанализируем теперь $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$. Как видно из таблицы 1, количество арифметических действий на выполнение сглаживающих итераций при переходе от исходной системы, соответствующей мелкой сетке, к системе, соответствующей крупной сетке, такое же, как в $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$, $3C^{GS}n_x\cdot n_y$. При обратном переходе для каждой системы выполняются:

1) половина итерации блочного метода Гаусса — Зейделя;

2) симметричный V-цикл итерации $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{y}}$, всего

$$\frac{13}{2}C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y\left(\frac{1}{2^{k_x-1}}+\frac{1}{2^{k_x-2}}+\ldots+1\right)\approx 13C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y$$

арифметических действий. Итак, получим, что на выполнение одной итерации $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ по схеме симметричного V-цикла необходимо затратить число арифметических действий примерно $16\cdot C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y$.

Если для реализации $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$-итерации применить схему несимметричного V-цикла, а именно при переходах от системы, соответствующей мелкой сетке, к решению системы, соответствующей крупной, выполнять только половину сглаживающей итерации, то общее число арифметических действий уменьшится так, что получим $10C^{GS}\cdot n_x\cdot n_y$.

3. Численные результаты

Исследуем на численных примерах эффективность вариантов $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ и $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ многосеточного метода при различных способах построения матриц вспомогательных систем и схем выполнения V-цикла итерации. Для этого рассмотрим однородную задачу Дирихле в единичном квадрате $D=(0,1)\times(0,1)$ для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f\ .$$

Применение сеточного метода для численного решения этой задачи приводит к системе (1, 2). Предположим, что $n_x = n_y = n$, обозначим

$$\left\|\mathbf{r}^{(k)}\right\| = \sum_{i,j=1}^{n}\left|r_{i,j}^{(k)}\right|,\ v_k = \left\|\mathbf{r}^{(k)}\right\| / \left\|\mathbf{r}^{(k-1)}\right\|,\ \rho = \lim_{k\to+\infty} v_k\ ,$$

где $\mathbf{r}^{(k)}$ — невязка после k-й многосеточной итерации. Значение скорости сходимости ρ вычислялось в момент, когда первоначальная невязка уменьшилась не менее чем в 10^{10} раз; v_k^1, v_k^2 — значения скоростей сходимости итераций $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$ и $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ соответственно.

Таблица 2

Скорость сходимости и количество итераций $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ по схеме симметричного V-цикла в зависимости от коэффициентов системы и мелкости сетки при условии $\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{reduce}(\mathbf{A}_l) + \mathbf{Q}_{l+1}$

$p(x,y)=q(x,y)$	n	99	256	512	777
1. $p(x,y)=1$	$v_k^1\ (k)$	0,05096(8)	0,05309(8)	0,05355(8)	0,05310(8)
	$v_k^2\ (k)$	0,00071(3)	0,00067(3)	0,00062(3)	0,00060(3)
2. $p(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$	$v_k^1\ (k)$	0,05240(8)	0,05376(8)	0,05409(8)	0,05405(8)
	$v_k^2\ (k)$	0,00090(3)	0,00082(3)	0,00078(3)	0,00076(3)
3. $p(x,y)=1+$ $+\,0,8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	$v_k^1\ (k)$	0,07810(10)	0,08124(10)	0,08181(10)	0,08283(10)
	$v_k^2\ (k)$	0,00184(4)	0,00139(4)	0,00070(3)	0,00046(3)

Видно, что для монотонных коэффициентов в уравнении $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$-метод малоэффективен по сравнению с $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$, так как для уменьшения первоначальной невязки в 10^{10} раз требуется примерно одинаковое число действий — $48Cn^2$. Строка 3 показывает, что $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ может иметь некоторое преимущество при решении задач с быстро изменяющимися коэффициентами со значительной амплитудой колебаний. Если итерация $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ реализуется по схеме несимметричного V-цикла, то для уменьшения первоначальной невязки в 10^{10} раз требуется примерно $40Cn^2$ действий против $48Cn^2$ $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$-методом. Следовательно, этот вариант $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$-итерации более эффективен по сравнению с $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$.

Здесь и далее через k^1, k^2 обозначено количество многосеточных итераций $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$, $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$ соответственно. Из таблицы 3 видно, что в большинстве случаев есть явное преимущество $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{xy}}$-метода, особенно выразительно оно в случае 2: для уменьшения первоначальной невязки в 10^{10} раз требуется примерно $50Cn^2$ арифметических действий против $72Cn^2$ $\mathrm{MGM}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{x}}$-методом.

Таблица 3

Количество итераций $\mathbf{MGM_{SC}^{x}}$, $\mathbf{MGM_{SC}^{xy}}$ по схеме несимметричного V-цикла в зависимости от коэффициентов системы и мелкости сетки при условии $\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{reduce}(\mathbf{A}_l) + \mathbf{Q}_{l+1}$

$p(x,y), q(x,y)$	n	99	256	512	777
1. $p(x,y) = 1 - e^{-x\cdot y}$	k^1	11	11	11	11
$q(x,y) = 1 + 0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	k^2	7	6	5	5
2. $q(x,y) = 1 - e^{-x\cdot y}$	k^1	12	13	13	13
$p(x,y) = 1 + 0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	k^2	5	5	5	4

Из таблицы 4 видно, что при указанном способе построения матриц вспомогательных систем, более экономичном по сравнению с предыдущим способом, также имеются преимущества $\mathrm{MGM_{SC}^{xy}}$ по сравнению с $\mathrm{MGM_{SC}^{x}}$. В большинстве приведенных примеров количество арифметических операций для уменьшения невязки в 10^{10} раз $\mathrm{MGM_{SC}^{xy}}$-методом примерно в 1,5 раза меньше по сравнению с $\mathrm{MGM_{SC}^{x}}$-методом.

Таблица 4

Количество итераций $\mathbf{MGM_{SC}^{x}}$, $\mathbf{MGM_{SC}^{xy}}$ по схеме несимметричного V-цикла в зависимости от коэффициентов системы и мелкости сетки при условии $\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{reduce}(\mathbf{A}_l)$

$p(x,y), q(x,y)$	n	99	256	512	777
1. $p(x,y) = q(x,y) = 1$	k^1	7	8	8	8
	k^2	3	3	3	3
2. $p(x,y) = q(x,y) = 1 - e^{-x\cdot y}$	k^1	8	8	8	8
	k^2	3	3	3	3
3. $p(x,y) = q(x,y) = 1 + 0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	k^1	9	9	9	10
	k^2	5	4	4	4
4. $p(x,y) = 1 - e^{-x\cdot y}$	k^1	10	10	10	10
$q(x,y) = 1 + 0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	k^2	6	5	4	4
5. $q(x,y) = 1 - e^{-x\cdot y}$	k^1	12	13	13	13
$p(x,y) = 1 + 0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	k^2	4	4	4	4

Из таблицы 5 видно, что $\mathrm{MGM_{SC}^{xy}}$-метод имеет явное преимущество по сравнению с $\mathrm{MGM_{SC}^{x}}$-методом.

Таблица 5

Скорость сходимости и количество итераций $\mathbf{MGM}_{\mathbf{SC}}^{\mathbf{x}}$, $\mathbf{MGM}_{\mathbf{SC}}^{\mathbf{xy}}$ по схеме несимметричного V-цикла в зависимости от коэффициентов системы и мелкости сетки при условии $\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{r}_l\, \mathbf{A}_l \mathbf{p}_l$

$p(x,y)$, $q(x,y)$	n	128	256	512
1. $p(x,y)=q(x,y)=1$	$v_k^1\,(k)$	0,04958(8)	0,05043(8)	0,05087(8)
	$v_k^2\,(k)$	0,00132(3)	0,00133(3)	0,00133(3)
2. $p(x,y)=q(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$	$v_k^1\,(k)$	0,26339(17)	0,32641(20)	0,38538(23)
	$v_k^2\,(k)$	0,01661(6)	0,01807(6)	0,01916(6)
3. $p(x,y)=q(x,y)=1+$	$v_k^1\,(k)$	0,08387(10)	0,08563(10)	0,08607(10)
$+0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	$v_k^2\,(k)$	0,00419(5)	0,00248(4)	0,00178(4)
4. $p(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$	$v_k^1\,(k)$	0,11729(11)	0,12396(11)	0,15306(12)
$q(x,y)=1+0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	$v_k^2\,(k)$	0,03480(6)	0,01486(5)	0,01060(5)
5. $q(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$	$v_k^1\,(k)$	0,16512(13)	0,16941(13)	0,17058(13)
$p(x,y)=1+0{,}8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	$v_k^2\,(k)$	0,00250(4)	0,00204(4)	0,00180(4)

Список литературы

1. *Mandel J., McCormick S., Ruge J.* An algebraic theory for the multi-grid method including V-cycle // SIAM J. Numer. Anal. 1983. Vol. 20.
2. *Hackbusch W.* Multi-grid method and applications. Springer, 1985.
3. *Maitre J.-F., Musy F.* Multigrid methods for symmetric variational problems: a general theory and convergence estimates for usual smoothers // Appl. Math. and Comp. 1987. Vol. 21.
4. *Ольшанский М. А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. М., 2005.
5. *Белякова О. В., Буздин А. А.* Многосеточный метод с полуукрупнением для решения систем с блочной трехдиагональной матрицей // Методы вычислений. 2005. №21. С. 5—19.
6. *Буздин А. А., Дедух С. С.* Вариант многосеточного метода с полуукрупнением сетки // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2009. Вып. 10. С. 74—81.
7. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Об авторе

Ольга Владиславовна Белякова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: obelyakova@ya.ru.

Author

Dr Olga Belyakova — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: obelyakova@ya.ru.